ANTENAS FRACTALES

Dr. Daniel Mocencahua Mora
dmocencahua@ece.buap.mx

Jaime Oscar Tenorio Pearl
jaimetpearl@hotmail.com

Facultad de Ciencias de la Electrónica
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Edificio 129, Ciudad Universitaria
Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel
Puebla, Pue., CP. 72590

RESUMEN

En este trabajo se mencionan las propiedades que tiene un fractal. Se definen la carpeta y el triángulo de Sierpinskii por medios geométricos iterativos y se verifica que son fractales por medio de la métrica de Haussdorff.

Se ilustra la importancia de dichos conceptos para la electrónica por medio de su aplicación en antenas.

1. INTRODUCCIÓN

En los Sistemas Móviles de Comunicaciones (Celulares, Radio Teléfonos, etc) es de vital importancia el uso racional del espacio. Sin embargo un elemento crucial del sistema que utiliza mucho de ese espacio es la antena.

Una solución inesperada para este problema fue construir Antenas Fractales, las cuales son más compactas y tienen ciertas propiedades que las hacen preferibles a las antenas tradicionales.

2. PRESENTANDO A LOS FRACTALES

La palabra fractal fue acuñada por **Benoit Mandelbrot**[1] a finales de los setenta, pero los objetos que hoy se aceptan como fractales han sido conocidos por artistas y matemáticos por siglos. Aunque la definición de Mandelbrot, "Un conjunto cuya dimensión de Hausdorff[2] no es un entero", es clara en términos matemáticos no lo es de manera intuitiva, sin embargo se relaciona con el fractal el concepto de la auto similitud: un objeto fractal tiene auto similitud en el sentido de que secciones de él son similares al todo de alguna forma. No importa que tan pequeña se tome tal sección, no tendrá menos detalles que el todo. Los siguientes son ejemplos típicos de fractales.

3. EL CONJUNTO DE CANTOR

El fractal mas sencillo de obtener es sin duda el conjunto de Cantor[3]. Para ello se extrae del intervalo [0,1] su tercio central, a los dos tercios restantes se les extrae su tercio central... y así sucesivamente. Si juntamos todos los conjuntos obtenidos obtenemos el peine de Cantor, que a continuación mostramos en su quinta iteración (Figura 1).

Figura 1: Conjunto de Cantor.

4. EL COPO DE NIEVE DE KOCH

En 1890 **Peano**[4] mostró como las Matemáticas pueden traicionar el sentido común cuando se construyen curvas que llenan el espacio. **Hilbert**[5] desarrolló un construcción similar para exhibir una curva que visita cada punto de un cuadrado y que no es diferenciable en cualquiera de sus puntos. La curva generada por **Helge von Koch**[6] en 1904 es un ejemplo típico de las curvas definidas en ese tiempo

[1] Mandelbrot significa "pan de almendras" en alemán.
[2] Hausdorff significa "casa del pueblo" en alemán.
[3] Alemán (1845-1918)
[4] Italiano, (1858-1932)
[5] Alemán. (1862-1943)
[6] (1870-1924)

y que ahora es un fractal clásico. Para construirla se toma un segmento unitario y entonces se extrae el tercio central, reemplazándole por dos segmentos de longitud *1/3*. Por cada segmento resultante se repite el procedimiento: a cada segmento se le extrae su tercio central y se sustituye por dos segmentos de un tercio del original. Ahora bien, por cada etapa el total de la curva se multiplica por *4/3*. Esto implica que la "longitud" final de la curva es infinita. Sin embargo, no es difícil verificar que el área de la curva es finita (Figura 2). Es decir tenemos una curva de longitud infinita y de área finita. Esta curva no es diferenciable en cualquiera de sus puntos y contiene un número infinito de imágenes de si misma. Por eso, no importa cuan cerca estén dos puntos de la curva, siempre habrá una distancia infinita entre ellos.

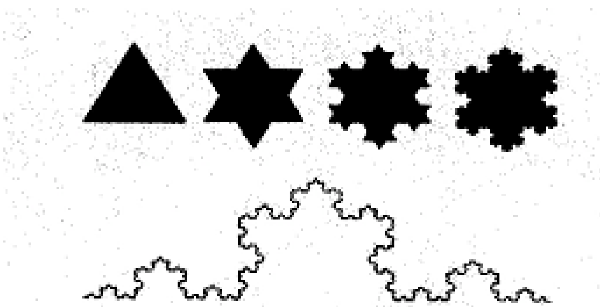

Figura 2: Copo de Nieve de Koch.

5. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKII

Waclaw Sierpinskii[7] ha dado su nombre a varios fractales: el triángulo, la carpeta, el tetraedro y la esponja.
Para construir el Triángulo de Sierpinskii se extrae de un triángulo equilátero el triángulo formado por los puntos medios del original. A los triángulos resultantes se les aplica el mismo procedimiento y se continúa así indefinidamente (Figura 3). Note que se extrae *1/4* de área de por cada triángulo: si *A* es el área del triángulo inicial, en la primera etapa se extrajo *A/2* de área; en la segunda se extrae un cuarto de área de los triángulos resultantes, cada uno de los cuales tiene un cuarto de área del original; en el tercer paso se extraen nueve triángulos de área $(1/4)^3$ *A*.

Para el área extraída se tiene la serie geométrica

$$A\left[\frac{1}{4}+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3+3^3\left(\frac{1}{4}\right)^4+\dots\right]=$$

$$\left(\frac{A}{4}\right)\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots\right]=A$$

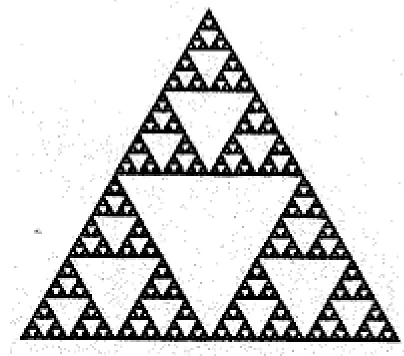

Figura 3: Triángulo de Sierpinski.

Así que la figura restante tiene área cero pero no es un conjunto vacío y forma lo que matemática e intuitivamente se llama un polvo.

La construcción de la carpeta es similar, sólo que esta vez la figura base es un cuadrado y se extrae un cuadrado centrado de un tercio del original (Figura 4).

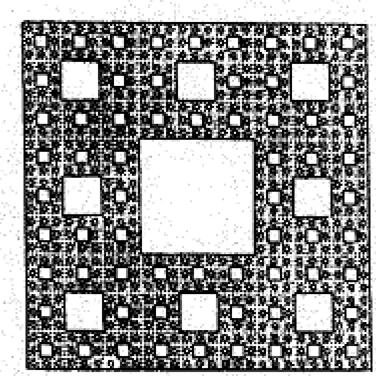

Figura 4: Carpeta de Sierpinski.

6. ¿CÓMO SE DEFINE UN FRACTAL?

Aunque Mandelbrot utiliza la palabra fractal a finales de los setenta (de hecho se dice que el origen de la geometría fractal se puede situar en 1975), es claro que los objetos considerados por él como fractales ya existían desde antes. Muchos objetos naturales como árboles, costas marinas o nubes tiene propiedades fractales, y también objetos abstractos considerados por los matemáticos resultaron ser fractales. De hecho la propiedad que según

[7] Polaco (n. 1882)

Dedekind[8] define que un conjunto sea infinito suena mucho al concepto actual de fractal: *Un conjunto S se dice ser infinito cuando es equipotente a un subconjunto propio de él.*

7. DIMENSIÓN FRACTAL

En el modo "lineal" de ver las cosas (entiéndase la geometría usual) la dimensión sería la cantidad de parámetros que se necesitan para situar un punto. Así en una curva suave solo necesitamos de un parámetro, la longitud de arco desde un punto fijo, por dar un ejemplo. En una superficie se necesitan dos coordenadas y en el espacio tres. Así que la geometría "lineal" (Euclidiana) les ha asignado dimensión uno, dos y tres, respectivamente y dimensión cero a un punto. Otro modo de verlo es así: sólo tienes un forma de moverte en una línea, en una superficie tienes dos direcciones, y en el espacio tres.

Todo eso está muy bien pero, ¿de qué forma te mueves en una esponja, o en una nube o en un nudo? Tratando de resolver este problema Mandelbrot utiliza el concepto de dimensión de Hausdorff (que en cierto modo generaliza la dimensión euclidiana) y decide que en una esponja[9] se tiene una dimensión fraccionaria: como ni es un objeto plano, ni es un objeto "lleno" en el espacio, debe tener una dimensión entre 2 y 3.

Es este un buen momento para formalizar estas ideas y dar las definiciones que nos lleven a lo ya mencionado intuitivamente.

Definición. *Un subconjunto S de* $\boldsymbol{R}^n$. *se dice ser afín* ***autosimilar*** *si puede ser dividido en k subconjuntos congruentes, cada uno de los cuales puede ser ampliado por un factor constante M para ocupar el conjunto entero S.*

Se puede ver que, por ejemplo, la curva de Koch, o el pentágono de Durero son conjuntos afines autosimilares, así como la línea, el plano y el cubo.

De hecho la línea es autosimilar a todas luces: se puede descomponer un segmento de recta en $n = n^1$, pedacitos, cada uno de longitud 1 del original, que ampliados en un factor *n,* se ven exactamente como la línea original. También el cuadrado se puede descomponer en piezas que tienen *1/n* veces el tamaño del original pero se necesitan n^2 de esas piezas. Para el cubo se necesitan n^3 piezas de *1/n* veces el tamaño del original. Note que el exponente en cada caso distingue la dimensión del objeto en cuestión. Este exponente es precisamente su **dimensión fractal.**

Definición. *Suponga que el conjunto autosimilar afín S se puede dividir en k partea congruentes, cada una de las cuales puede ser ampliada en un factor M para obtener el todo, es decir se obtiene otra vez el conjunto S. Entonces la* ***dimensión fractal*** *de S es*

$$D = \frac{\log(k)}{\log(M)}$$

Note que esta definición generaliza la idea euclidiana ya que para un segmento de recta tenemos:

$$D = log(n^1)/log(n) = 1$$

Para un cuadrado:

$$D = log(n^2)/log(n) = 2$$

Y para un cubo:

$$D = log(n^3)/log(n) = 3$$

Aceptemos pues la definición de Mandelbrot:

Definición. *Un conjunto autosimilar afín S es un* ***fractal*** *si tiene corno dimensión fractal un número que no es un entero.*

Que el conjunto de Cantor es un conjunto autosimilar afín es claro a partir de su definición. Recuerde que el número de intervalos en cada etapa de su construcción es 2^n, pero el factor de amplificación es de 3^n, luego su dimensión fractal es

$$D = log(2^n)/log(3^n) = n\ log(2)/\ n\ log(3) = 0.6309...$$

Con lo cual podemos pensar que como el conjunto de Cantor no tiene dimensión entera es un fractal, de hecho ya vimos que no llena el intervalo imitarlo, pero tampoco es un conjunto vacío. Tal vez la mejor manera de describir la *fractalidad* del conjunto de Cantor es pensándolo, al igual que otros fractales, como un **polvo.**

De hecho el conjunto de Cantor es el fractal más simple que se puede crear en cada uno de los espacios R^n.

Para la curva de Koch tenemos cuatro copias de escala a *1/3*. Así que $D = log(4)/log(3) = 1.2619$.

El triángulo de Sierpinski tiene tres copias a *1/2* de escala así que tiene dimensión:

$$D = log3/log2 = 1.5850$$

[8] Alemán, (1831-1916)
[9] Por cierto una esponja también presenta autosimilitud.

y construido una antena basada en el triángulo de Sierpinski en configuración de monopolo (Figura 5).

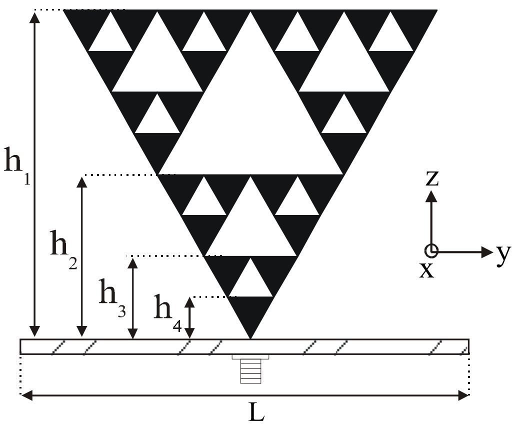

Figura 5: Triángulo de Sierpinskii en configuración de Monopolo.

8. APLICACIÓN DE LOS FRACTALES EN LA ELECTRÓNICA: ANTENAS DE SISTEMAS MÓVILES

El objetivo de usar Antenas Fractales es el de ampliar las bandas de frecuencia en los sistemas móviles. El utilizar una antena para cada banda es poco útil, así se busca tener una sola antena que funcione para varias frecuencias.

El tamaño de una antena siempre va relacionado estrechamente con la longitud de onda de la banda a ser transmitida por medio de esta; es por esto que no es posible utilizar una misma antena a diferentes frecuencias. Los Fractales permiten diseñar antenas **multibanda**, con la geometría fractal se obtienen antenas que contienen en un solo objeto, copias de él mismo en diferentes tamaños, y esto permite el mismo comportamiento a diferentes frecuencias.

Una de las propiedades básicas de un objeto fractal es la autosimilitud. Un cuerpo fractal está formado por copias de él mismo reducidas en un cierto factor de escala. Las antenas multibanda recurren al principio de escalabilidad.

Principio de Escalabilidad: Si tenemos una antena que funciona a una cierta frecuencia *f*, y multiplicamos sus dimensiones por un factor *k*, la antena resultante se comportará igual que la original pero a una frecuencia *f/k*.

Si se tiene una antena formada por copias de ella misma pero en diferentes escalas, se obtiene un elemento con el mismo comportamiento electromagnético en tantas bandas de frecuencia como factores de escala contenga la estructura, y esto es un comportamiento multibanda.

9. MONOPOLOS

Los monopolos clásicos son antenas de hilo situadas verticalmente sobre la tierra y conectadas en su base a un generador, el otro terminal del cual está conectado a tierra. En el caso de los monopolos fractales, dado que de momento no se dispone de modelos con expresiones analíticas cerradas para sus parámetros tanto de impedancia como de radiación, se han utilizado conceptos de monopolos de hilos y propiedades de los fractales para diseñar una antena dual. En la primera fase se ha diseñado

Las antenas son en esencia aparatos de banda estrecha. Su comportamiento es altamente dependiente del tamaño de la antena y de la longitud de onda operante. Esto significa que para un tamaño de antena fijo, los parámetros principales de la antena (ganancia, impedancia de entrada, patrón de figura, nivel y distribución secundarios del lóbulo) sufrirán fuertes variaciones cuando se cambia la frecuencia operante.

Por ejemplo, la Figura 6 muestra la evolución del patrón de radiación de una antena clásica común (un dipolo linear). Cada vez que la frecuencia se duplica, varios glóbulos aparecen, modificando el modo en que la antena esparce la potencia en el espacio.

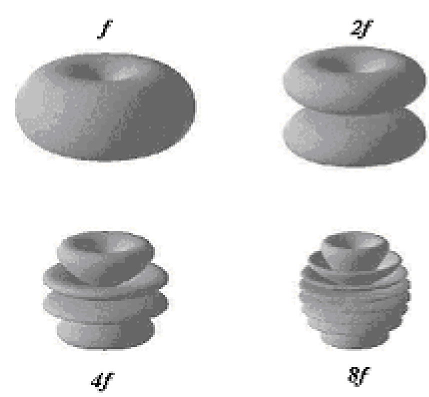

Figura 6: Patrones de Radiación de un Dipolo.

Análogamente, la dependencia de frecuencia también implica que la antena tiene que mantener un tamaño mínimo relativo a la longitud de onda para operar con eficiencia. Esto es, dada una frecuencia en particular, la antena no puede ser construida arbitrariamente pequeña; usualmente tiene que mantener un tamaño mínimo, típicamente en el orden de un cuarto de longitud de onda.

La dependencia con el tamaño de la longitud de onda es un problema en muchos sistemas donde diseños de antenas anteriores no son convenientes. En ese sentido, el diseño de antenas Fractales y arreglos pueden ayudar a tratar el problema, contribuyendo con una amplio y variado conjunto de figuras geométricas con propiedades sorprendentes.

La razón por la cual usar un diseño fractal para hacer antenas es doble. Primero, uno puede esperar una antena con autosimilitud (que contiene varias copias de si mismas a diferentes escalas), que pueda operar en un modo similar en diferentes bandas de frecuencia. Segundo, debido a las propiedades de *relleno de espacio* de algunas figuras Fractales (la dimensión fractal), pueden permitir el realizar antenas más pequeñas con figuras Fractales (Figuras de la 7 a la 10) para tomar ventaja del espacio circundante.

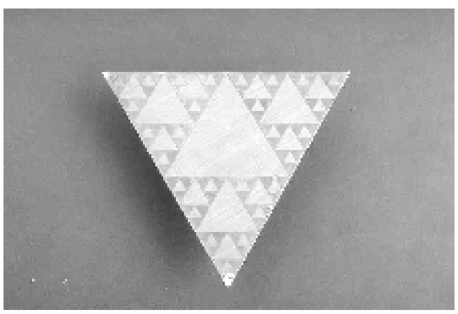

Figura 7: Antena Fractal en Configuración de Triangulo de Sierpinski.

Figura 8: Antena Fractal en Configuración de Conjunto de Cantor.

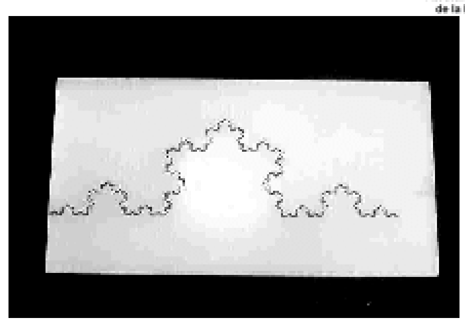

Figura 9: Antena Fractal en Configuración de Copo de Koch.

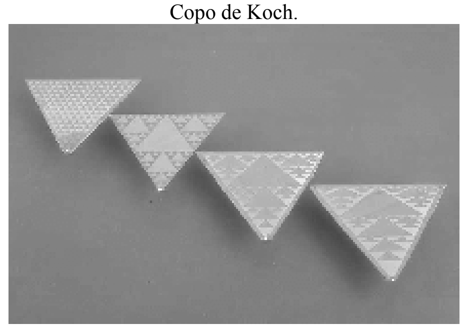

Figura 10: Antenas Fractales con Diferentes Iteraciones en el Triángulo de Sierpinski.

10. CONCLUSION

En este trabajo se recalca la aplicación de un concepto abstracto como los Fractales en una necesidad cotidiana como las Antenas que se usan en los Sistemas Móviles de Comunicaciones.

11. REFERENCIAS

[1] Huw Jones, *Fractals Before Mandelbrot, A Selective History*, in Fractals And Chaos, A.J. Crilly et al editors, (USA: Springer-Verlag, 1991).

[2] Robert L. Devaney, *Chaotic Dynamical Systems*, (USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989).

[3] C. Puente Baliarda & J. Soler Castany, Resumen Proyecto Fin de Carrera y Documentación, *Antenas Multibanda para Sistemas de Comunicaciones Inalámbricas,* UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA (UPC). 1999.

[4] Henry Estrada Beltrán, Seminario de Titulación, Universidad del Bio-Bio, Antenas de Banda Ancha. Consultado el 2 de Septiembre de 2002 en el World Wide Web:

http://www.geocities.com/ingenieria_antenas/texto6.htm