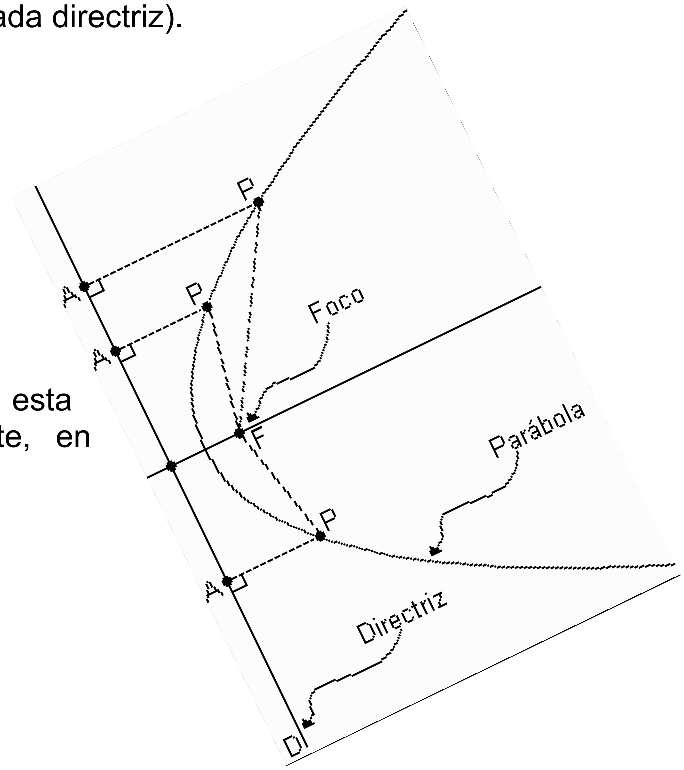
IX. LA PARÁBOLA

9.1. LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

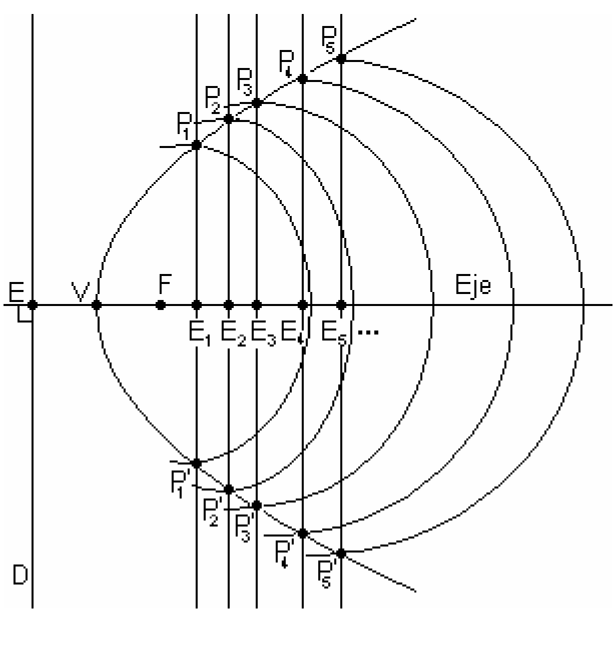
Definición: Se llama parábola al lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en un plano, en forma tal que su distancia a un punto fijo "F" (llamado foco) es igual a su distancia a una recta fija "D" (llamada directriz).

Una interpretación gráfica de esta definición puede ser la siguiente, en donde por definición $d(PF) = d(PA)$



9.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA CON REGLA Y COMPÁS

El siguiente procedimiento es una forma de construir una parábola utilizando regla y compás, sobre la base de que conocemos la directriz "D" y el foco "F" de la parábola.



a) Se traza el <u>eje focal</u> (o simplemente eje) que es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz "D" y la cruza en el punto "E".

b) Se determina el vértice "V" de la parábola que es el punto medio del segmento EF.

c) Se eligen arbitrariamente algunos puntos sobre el eje focal a la derecha del vértice, sean por ejemplo $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, \ldots$ Por cada uno de estos puntos se trazan rectas paralelas a la directriz (cuerdas).

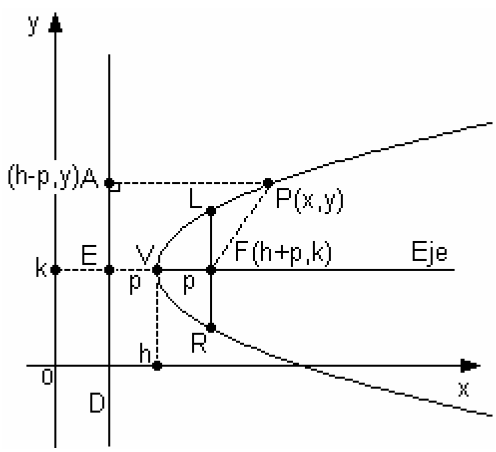
d) Con un compás, haciendo centro en el foco "F" y radios $EE_1, EE_2, EE_3, EE_4, EE_5,\ldots$ se trazan arcos de círculo que cortan a cada cuerda (segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola) en los puntos $P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3', P_4, P_4', P_5, P_5',\ldots$ Estos puntos pertenecen a la parábola (cumplen con la definición).

e) Uniendo con línea continua los puntos anteriores junto con el vértice, podemos trazar una parte de la parábola ya que es una curva que se extiende indefinidamente y en la hoja de papel solo podemos dibujar parte de ella.

f) Observar cualquier parábola es simétrica respecto a su eje.

9.3. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN LAS FORMAS ORDINARIA Y GENERAL CON EJE FOCAL PARALELO CON LOS EJES COORDENADOS

Para resolver este problema, nos remitiremos nuevamente a la ayuda de los sistemas de coordenadas, para interpretar y describir las relaciones existentes de un lugar geométrico en el plano cartesiano y las expresiones algebraicas que lo representan.



- Consideremos una parábola con su eje paralelo al eje "x".
- Denotemos por "h" y "k" las coordenadas del vértice $V(h,k)$.
- Si la distancia del vértice al foco es $d(VF) = p = d(EV)$, entonces las coordenadas del foco son $F(h+p,k)$.
- El punto "A" es el pié de la perpendicular desde el punto $P(x,y)$ a la directriz "D" y sus coordenadas son $A(h-p,y)$.
- Por definición $d(PF) = d(PA)$, aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano, se tiene:

$$d(PF) = \sqrt{(x_p - x_F)^2 + (y_p - y_F)^2} = \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2} = d(PA)$$

sustituyendo valores:

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-h-p)^2 + (y-k)^2} = x-h+p$$

elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando, simplificando y ordenando:

$$(x-h-p)^2 + (y-k)^2 = (x-h+p)^2$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{h^2} + \cancel{p^2} - 2hx - 2px + 2ph + y^2 - 2ky + k^2 = \cancel{x^2} + \cancel{h^2} + \cancel{p^2} - 2\cancel{h}x + 2px - 2ph$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 2px + 2px - 2ph - 2ph$$

$$(y-k)^2 = 4px - 4ph$$

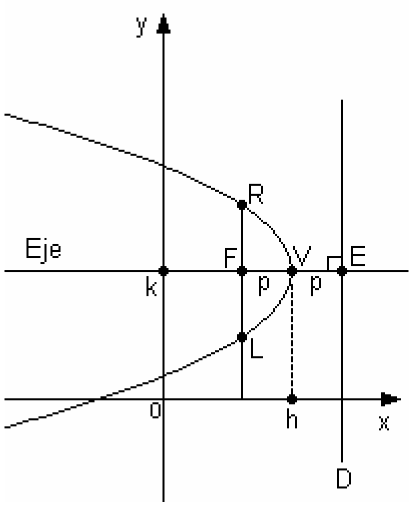
$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad ; p > 0} \;\cdots(1)$$

La ecuación (1) es la FORMA ORDINARIA de la parábola con las características siguientes de sus:

ELEMENTOS:

Ecuación del eje focal: $y = k$, ecuación de la directriz "D": $x = h - p$, coordenadas del vértice: $V(h,k)$, coordendas del foco: $F(h+p,k)$ con $p > 0$, la cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz es el LADO RECTO (o ancho focal) de la parábola y la denotamos con las letras L y R, como son puntos de la parábola sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, o sea que sabemos que su abscisa es $(h+p)$, su ordenada es: sustituyendo en (1) $(y-k)^2 = 4p(h+p-h)$; $(y-k)^2 = 4p^2$; $y = k \pm \sqrt{4p^2}$; $y = k \pm 2p$, por lo tanto, $L(h+p, k+2p)$ y $R(h+p, k-2p)$.

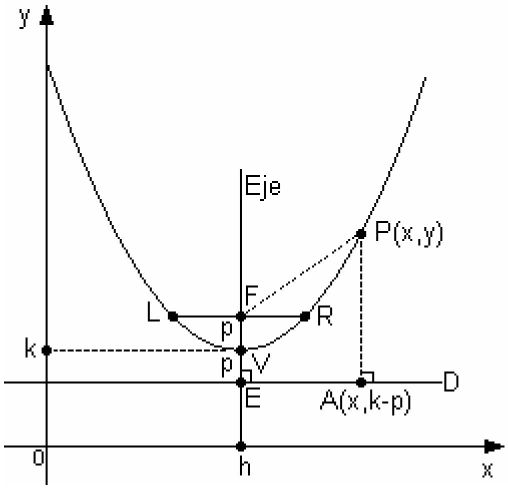
El primer miembro de la ecuación (1) siempre es no negativo (porque esta elevado al cuadrado), por lo tanto, también lo es el segundo miembro, esto nos indica que "x" debe tener el mismo signo que el parámetro "p".



Si el parámetro "p" es negativo $(p < 0)$ la ecuación (1) toma la forma:

$$\boxed{(y-k)^2 = -4p(x-h)} \;\cdots(2)$$

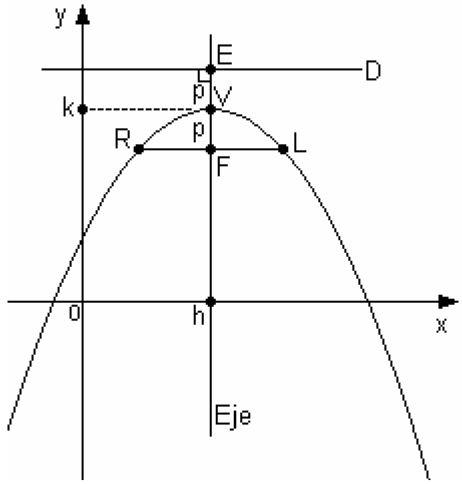
con las mismas características de los elementos de (1) pero sustituyéndoles el parámetro "p" negativo.



Si el eje de la parábola es paralelo al eje "y", procediendo de la misma manera que en la obtención de la ecuación (1), la ecuación de este tipo de parábola es:

$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$; $p > 0$ ...(3)

En donde el eje focal tiene ecuación $x = h$, $F(h, k+p)$, $V(h,k)$, $L(h-2p, k+p)$, $R(h+2p, k+p)$, Directriz: $y = k - p$



Si el parámetro "p" es negativo $(p < 0)$. La ecuación (3) toma la forma:

$$\boxed{(x-h)^2 = -4p(y-k)} \quad ...(4)$$

Con las mismas características de los elementos de (3) pero sustituyéndoles "p" negativo.

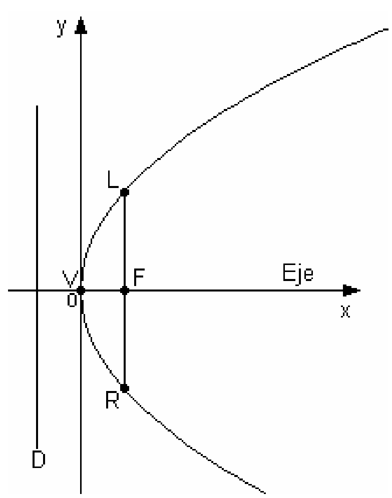
Nota: A modo de identificar con rapidez el tipo de parábola de que se trata conociendo su ecuación, se recomienda <u>no olvidar</u> que si la variable "y" está elevada al cuadrado, la parábola es horizontal (eje paralelo al eje "x") que es el caso de las ecuaciones (1) y (2). Si la variable "x" es la que está elevada al cuadrado, la parábola es vertical (eje paralelo al eje "y") que es el caso de las ecuaciones (3) y (4).

La ecuación de una parábola toma su forma más sencilla cuando su vértice $V(h,k)$ coincide con el origen de coordenadas o sea que $V(0,0)$ y su eje coincide con uno de los ejes coordenados x, y. Por lo anterior, las ecuaciones (1) a la (4) toman la forma (1') a la (4') como sigue:

(1)... $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$(y-0)^2 = 4p(x-0)$

(1')... $\boxed{y^2 = 4px}$



$p > 0$, Ec. eje: $y = 0$

Ec. Directriz: $x = -p$

$V(0,0), F(p,0)$

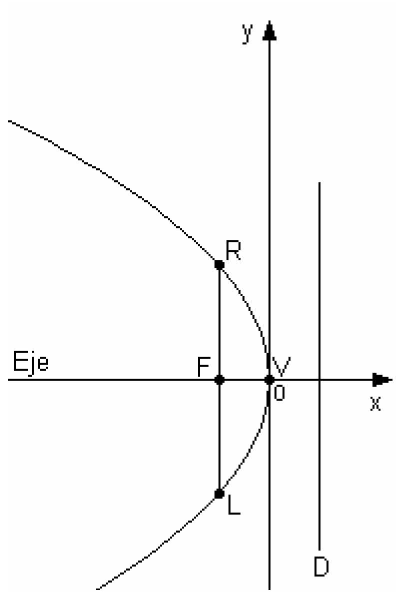
$L(p,2p), R(p,-2p)$

Con las mismas características de los elementos de (1') pero sustituyéndoles el parámetro "p" negativo.

(2)... $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

$(y-0)^2 = -4p(x-0)$

(2')... $\boxed{y^2 = -4px}$

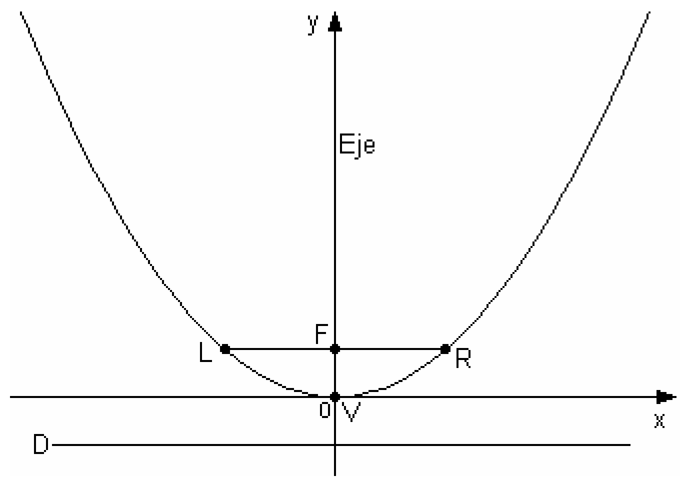


$p > 0$, Ec. eje: $x = 0$

Ec. Directriz: $y = -p$

(3)... $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

(3')... $\boxed{x^2 = 4py}$



$V(0,0), F(0,p)$
$L(-2p,p), R(2p,p)$

$(x-0)^2 = 4p(y-0)$

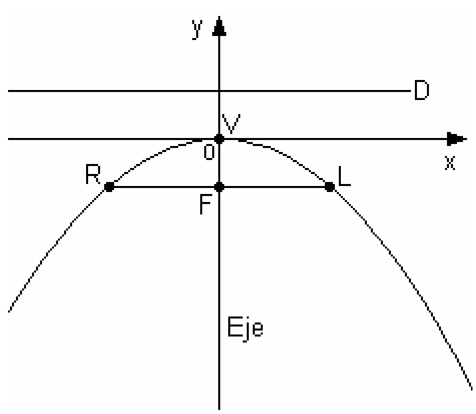
(4)... Con las mismas características de los

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$

elementos de (3') pero sustituyéndoles el parámetro "p" negativo.

(4')...

$\boxed{x^2 = -4py}$



$(x-0)^2 = -4p(y-0)$

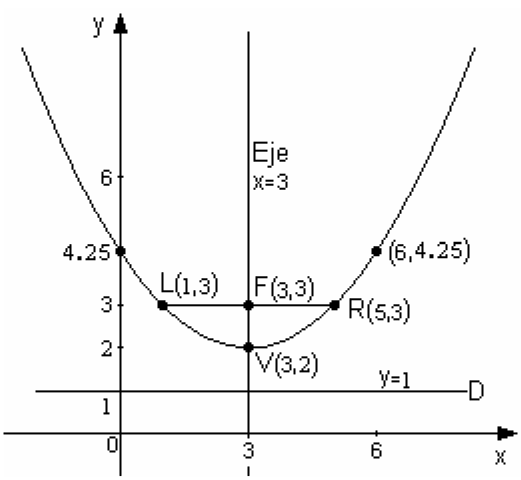
EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una parábola, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $(x-3)^2 = 4(y-2)$

Solución

Como la variable "x" es la que aparece elevada al cuadrado, sabemos que se trata de una parábola cuyo eje es paralelo al eje "y". La ecuación dada es de la forma (3)••• $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, en donde las coordenadas del vértice son $V(3,2)$, el valor de $4p = 4$, por lo tanto $p = \frac{4}{4} = 1$, con esta información podemos bosquejar rápidamente la gráfica de la parábola y con esta obtener los elementos que faltan como sigue:

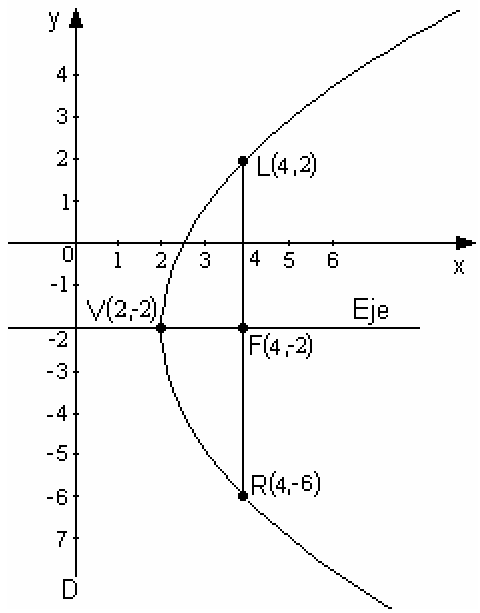


Sobre el sistema de ejes, localizamos el vértice $V(3,2)$, como el parámetro $p = 1$, las coordenadas del foco son $F(3,3)$, a la derecha del foco y a su izquierda también a $2p = 2(1) = 2$ de distancia, las coordenadas de L y R son: $L(1,3)$ y $R(5,3)$, la ecuación del eje es $x = 3$, la ecuación de la directriz "D" es $y = 1$. Si vemos que la curva cruzará alguno de los ejes, es conveniente determinar este valor, que servirá para un mejor bosquejo de la gráfica, en este caso, vemos que cruzará al eje "y" por lo tanto: si $x = 0$, la ecuación dada resulta $(0-3)^2 = 4(y-2)$ despejando la variable "y" se tiene: $9 = 4y - 8$; $17 = 4y$; $y = \frac{17}{4} = 4.25$, se obtiene el punto $\left(0, \frac{17}{4}\right)$ y aprovechando que la parábola es simétrica respecto a su eje, el punto $\left(6, \frac{17}{4}\right)$ también es punto de la parábola, con esto procedemos al bosquejo de su gráfica como se muestra uniendo con línea continua todos los puntos obtenidos.

2) $(y+2)^2 = 8(x-2)$

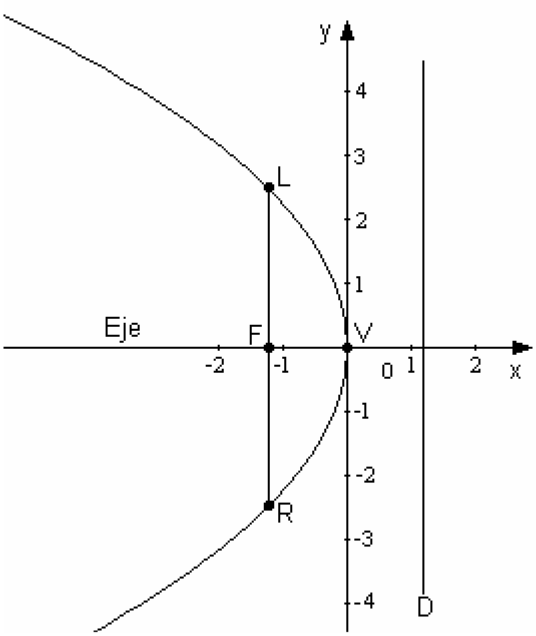
Solución

La ecuación de la parábola es de la forma (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde podemos ver que el vértice tiene coordenadas $V(2,-2)$, $4p = 8$, por lo tanto $p = \frac{8}{4} = 2$, $2p = 2(2) = 4$, el resto de los elementos de la parábola los obtenemos con la ayuda del bosquejo como en el ejemplo anterior: $F(4,-2)$, $L(4,2)$, $R(4,-6)$, Ecuación eje: $y=-2$, Ecuación directriz "D": $x=0$.



3) $y^2=-5x$

<u>Solución</u>

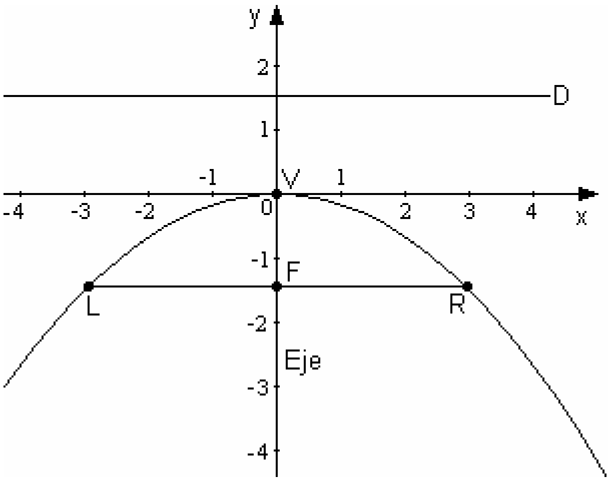


Como la ecuación es de la forma (2')••• $y^2=-4px$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $-4p=-5$, $p=\frac{5}{4}$, $2p=2\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{2}=2.5$, $F\left(-\frac{5}{4},0\right)$, $L\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$, $R\left(-\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$, Ecuación eje: $y=0$

Ecuación directriz "D": $x=\frac{5}{4}$

4) $x^2 = -6y$

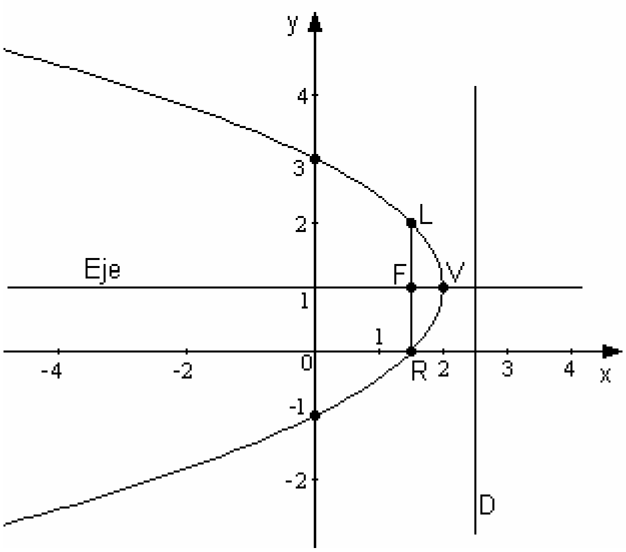
Solución



La ecuación es de la forma $(4') \cdots x^2 = -4py$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $-4p = -6$, $p = \frac{3}{2}$, $2p = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$, $F\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $L\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$, $R\left(3,-\frac{3}{2}\right)$, Ecuación eje: $x = 0$, Ecuación directriz "D": $y = \frac{3}{2}$

5) $(y-1)^2 = -2(x-2)$

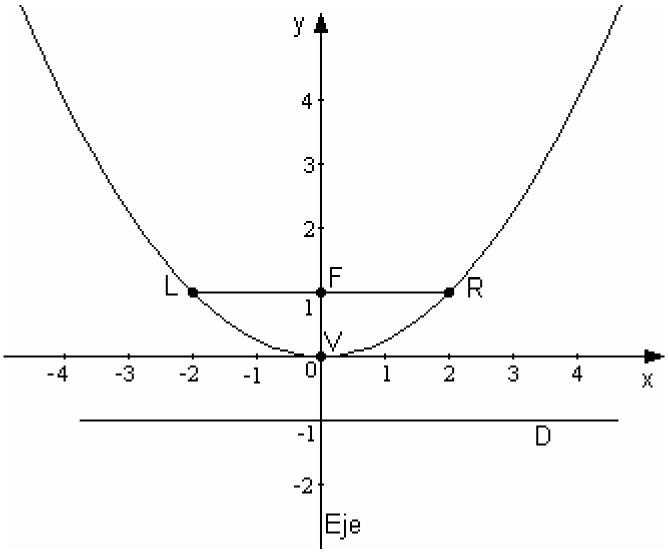
Solución



La ecuación es de la forma $(2) \cdots (y-k)^2 = -4p(x-h)$, el vértice tiene coordenadas $V(2,1)$, $-4p = -2$, $p = \frac{1}{2}$, $2p = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $F\left(\frac{3}{2},1\right)$, $L\left(\frac{3}{2},2\right)$, $R\left(\frac{3}{2},0\right)$, Ecuación eje: $y = 1$, Ecuación directriz "D": $x = \frac{5}{2}$, Intersección con el eje "y": si $x = 0$, $(y-1)^2 = -2(0-2)$, $(y-1)^2 = 4$, $y = 1 \pm \sqrt{4}$; $y_1 = 3$, $y_2 = -1$, son dos puntos: $(0,3)$ y $(0,-1)$

6) $x^2 = 4y$

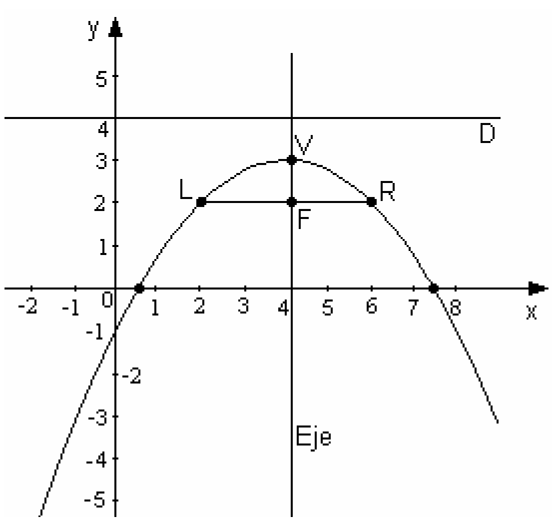
Solución



La ecuación es de la forma (3')••• $x^2 = 4py$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $4p = 4$, $p = 1$, $2p = 2(1) = 2$, $F(0,1)$, $L(-2,1)$, $R(2,1)$, Ecuación eje: $x = 0$, Ecuación directriz "D": $y = -1$,

7) $(x-4)^2 = -4(y-3)$

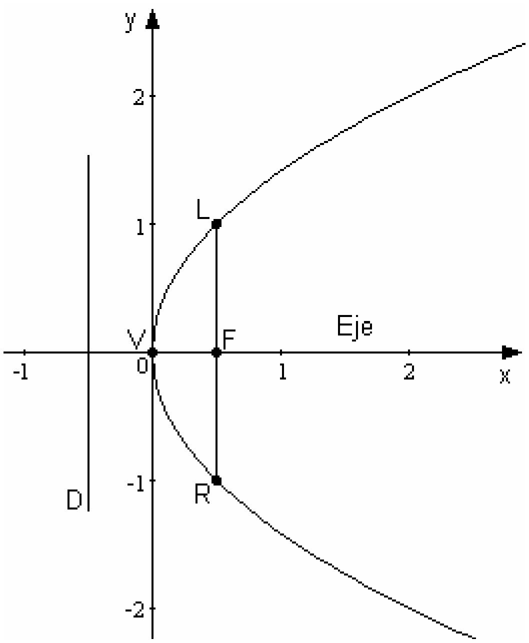
Solución



La ecuación es de la forma (4)••• $(x-h)^2 = -4p(y-k)$, el vértice tiene coordenadas $V(4,3)$, $-4p = -4$, $p = 1$, $2p = 2(1) = 2$, $F(4,2)$, $L(2,2)$, $R(6,2)$, Ecuación eje: $x = 4$, Ecuación directriz "D": $y = 4$, Intersección con el eje "x": si $y = 0$, $(x-4)^2 = -4(0-3)$, $(x-4)^2 = 12$, $x = 4 \pm \sqrt{12}$; $x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7.5$, $x_2 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.5$, son dos puntos: $(4+2\sqrt{3},0)$ y $(4-2\sqrt{3},0)$

8) $y^2 = 2x$

Solución



La ecuación es de la forma (1') $y^2 = 4px$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $4p = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $2p = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $F\left(\frac{1}{2},0\right)$, $L\left(\frac{1}{2},1\right)$, $R\left(\frac{1}{2},-1\right)$, Ecuación eje: $y = 0$, Ecuación directriz "D": $x = -\frac{1}{2}$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una parábola en forma ordinaria, obtenga sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $(x+2)^2 = 8(y-4)$
2) $(y-3)^2 = 4(x-2)$
3) $x^2 = -5y$
4) $y^2 = 6x$
5) $(x-1)^2 = -2(y-2)$
6) $y^2 = 4x$
7) $x^2 = 2y$
8) $(y-4)^2 = -4(x-3)$

FORMA GENERAL

Desarrollando las ecuaciones (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y (3)••• $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ se obtiene: $y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$; $x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$. Las cuales, cambiando su notación se pueden escribir como sigue:

(5)••• $y^2 + Dx + Ey + F = 0$; (6)••• $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Estas ecuaciones representan la <u>FORMA GENERAL</u> de las parábolas con eje paralelo al eje “x” y al eje “y” respectivamente, con vértice fuera del origen de coordenadas.

Recíprocamente, toda ecuación de una parábola en la forma general como la (5) y la (6) se pueden reducir a su forma ordinaria aplicando el método de completar cuadrados.

- En la ecuación (5) si el coeficiente $D \neq 0$, la parábola tiene su eje paralelo al eje “x”. Si $D = 0$, la parábola degenera en un par de rectas reales o imaginarias, paralelas al eje “x”.
- En la ecuación (6) si el coeficiente $E \neq 0$, la parábola tiene su eje paralelo al eje “y”. Si $E = 0$, la parábola degenera en un par de rectas reales o imaginarias, paralelas al eje “y”.

EJEMPLOS

En cada inciso del 1-4 se da la ecuación de una parábola en forma general, obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

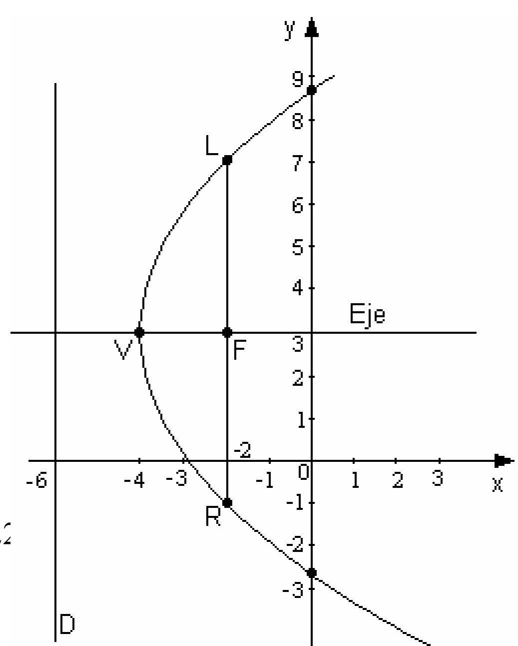
1) $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$

<u>Solución</u>

Aplicando el método de completar cuadrados reduciremos la ecuación dada a su forma ordinaria, con la cual podemos obtener la información pedida, como sigue:

- La ecuación dada se ordena con su término cuadrático: $y^2 - 6y = 8x + 23$

- Se completa cuadrados en el primer miembro:



$$y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 8x + 23 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$y^2 - 6y + (3)^2 = 8x + 23 + (3)^2$$
$$(y-3)^2 = 8x + 32$$

- Se factoriza el segundo miembro:

$(y-3)^2 = 8(x+4)$ Forma ordinaria

- Como sabemos, los elementos de la parábola y el bosquejo de su gráfica los podemos obtener con la forma ordinaria:

$V(-4,3)$, $p=2$, $2p=4$
$F(-2,3)$, $L(-2,7)$, $R(-2,-1)$
Ec. eje: $y=3$, Ec. "D": $x=-6$
Intersección con el eje "y": si $x=0$
$(y-3)^2=8(0+4)$; $(y-3)^2=32$
$y=3\pm\sqrt{32}=3\pm4\sqrt{2}$
$\left(0,3+4\sqrt{2}\right)\approx(0,8.7)$
$\left(0,3-4\sqrt{2}\right)\approx(0,-2.7)$

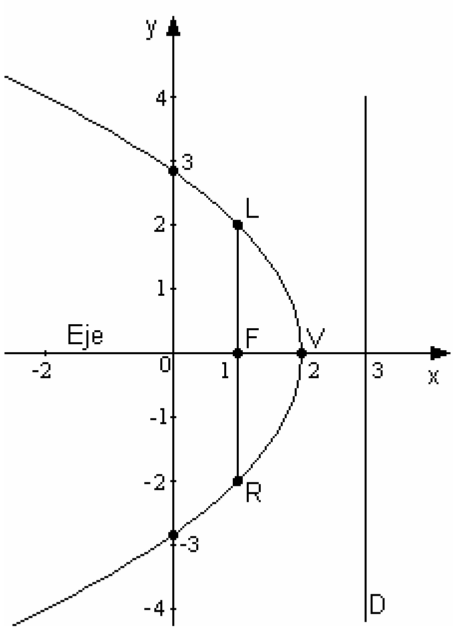
2) $y^2+4x-8=0$

Solución

Observando la ecuación dada, la falta del término en "y" nos indica que la parábola (horizontal) tendrá su vértice sobre el eje "x".

- En estos casos, se aisla el término cuadrático en el primer miembro y el resto se transpone al segundo miembro:

$$y^2=-4x+8$$



- Factorizando el segundo miembro:

$y^2=-4(x-2)$ esta es la Forma ordinaria de la parábola, con la cual se resolverá finalmente el problema:

$V(2,0)$, $p=1$, $2p=2$
$F(1,0)$, $L(1,2)$, $R(1,-2)$
Ec. eje: $y=0$, Ec. "D": $x=3$
Intersección con el eje "y": si $x=0$
$y^2=-4(0-2)$; $y^2=8$
$y=\pm2\sqrt{2}$
$\left(0,2\sqrt{2}\right)\approx(0,2.8)$
$\left(0,-2\sqrt{2}\right)\approx(0,-2.8)$

3) $4x^2-12x-16y-39=0$

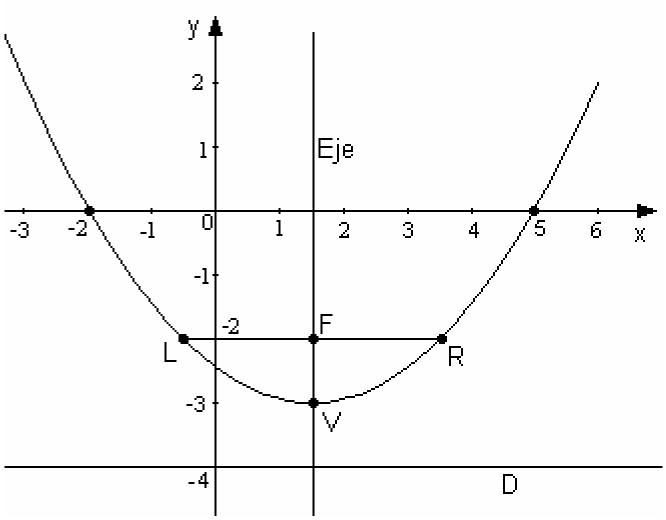
Solución

Observando la ecuación dada, se refiere a una parábola vertical (eje paralelo al eje "y"), con vértice fuera del origen.

- Primero dividiremos toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático:

$$\frac{4x^2 - 12x - 16y - 39}{4} = \frac{0}{4}$$
$$x^2 - 3x - 4y - \frac{39}{4} = 0$$

- Se ordena de acuerdo con el término cuadrático: $x^2 - 3x = 4y + \frac{39}{4}$



- Se completa el cuadrado del primer miembro:

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4y + \frac{39}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad ;$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4y + \frac{48}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4y + 12 \quad ; \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4(y + 3)$$

Forma ordinaria

$V\left(\frac{3}{2}, -3\right)$, $p = 1$, $2p = 2$

$F\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, $L\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, $R\left(\frac{7}{2}, -2\right)$

Ec. eje: $x = \frac{3}{2}$, Ec. "D": $y = -4$

Intersección con el eje "x": si $y = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4(0 + 3)$; $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 12$; $x = \frac{3}{2} \pm 2\sqrt{3}$

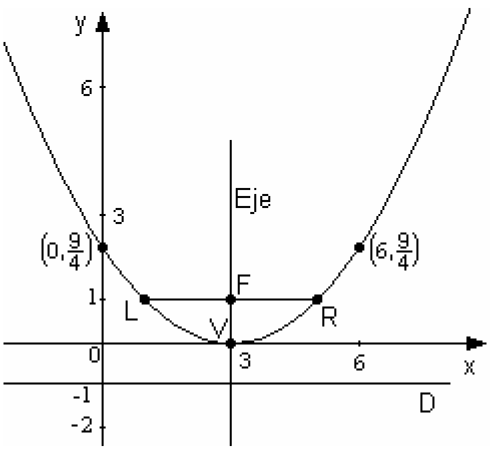
$\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}, 0\right) \approx (5, 0)$

$\left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}, 0\right) \approx (-2, 0)$

4) $x^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

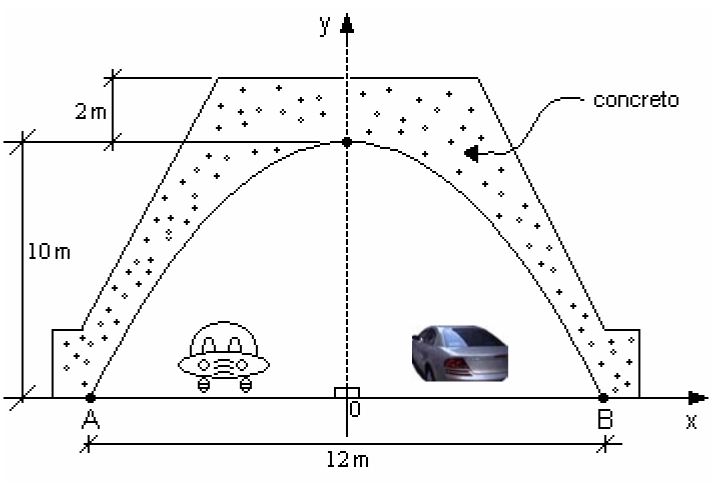
Solución

Insistiendo, es importante desarrollar la capacidad de observación con la información que se da, y no actuar como máquinas automáticas con todos los problemas por resolver, por ejemplo en este caso, si únicamente transponemos el término $-4y$ al segundo miembro: $x^2-6x+9=4y$, el primer miembro ya es un trinomio cuadrado perfecto: $(x-3)^2=4y$, ya que es la forma ordinaria de la ecuación de la parábola y por tanto:



$V(3,0)$, $p=1$, $2p=2$
$F(3,1)$, $L(1,1)$, $R(5,1)$
Ec. eje: $x=3$, Ec. "D": $y=-1$
Intersección con el eje "y": si $x=0$
$(0-3)^2=4y$; $y=\dfrac{9}{4}$; $\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$
por simetría con el eje, el otro punto es $\left(6,\dfrac{9}{4}\right)$

5) Se va a construir un túnel en forma de arco parabólico con las dimensiones que se indican en la figura, se pide determinar la ecuación de la parábola con respecto a los ejes coordenados que se muestran.



Solución

Se observa en la figura que el vértice tiene coordenadas $V(0,10)$ y que la parábola es vertical cuya ecuación es de la forma (4)••• $(x-h)^2=-4p(y-k)$.

- Los puntos A y B tiene coordenadas $A(-6,0)$ y $B(6,0)$.
- Sustituyendo las coordenadas del vértice en la ecuación (4):
  $(x-0)^2=-4p(y-10)$
  $x^2=-4p(y-10)$ •••(a)
- Los puntos A y B están sobre la parábola, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación (a): Sea $A(-6,0)$ entonces $(-6)^2=-4p(0-10)$; $36=40p$; $p=\dfrac{36}{40}=\dfrac{9}{10}$, sustituyendo este valor de "p" en la ecuación (a) se obtiene $x^2=-4\left(\dfrac{9}{10}\right)(y-10)$;

$x^2 = -\frac{18}{5}(y-10)$ que es la ecuación de la parábola en forma ordinaria y desarrollándola se obtiene la forma general $5x^2 + 18y - 180 = 0$

EJERCICIOS

En los incisos del 1-4 se da la ecuación de una parábola en la forma general, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $x^2 + 8x + 6y + 22 = 0$

2) $x^2 + 4x + 4 = 0$

3) $x^2 - 4y + 8 = 0$

4) $y^2 + 4y + 6x - 5 = 0$

5) El diámetro de una antena parabólica es de $12[m]$ y su profundidad es de $4[m]$, obtenga la localización de su foco.

9.4. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA BAJO CIERTAS CONDICIONES, CON EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

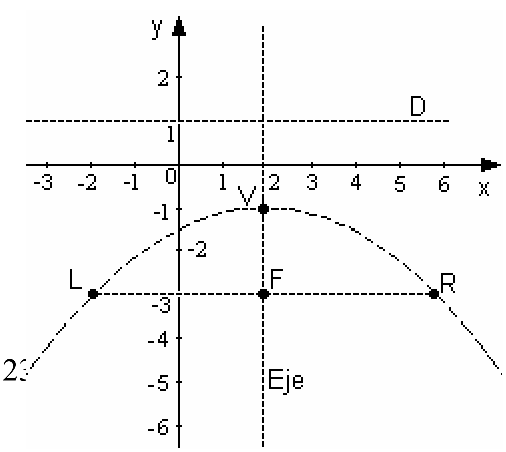
En esta sección trataremos algunos problemas donde se pide obtener la ecuación de una parábola horizontal o vertical, sujeta a ciertas condiciones que se dan previamente.

El procedimiento que se recomienda en todos los casos, consiste en graficar primero toda la información que se da, con la finalidad de elaborar la estrategia de solución que se propone en cada uno de los siguientes:

EJEMPLOS

1) Obtener la ecuación de la parábola vertical cuyo vértice es $V(2,-1)$ y foco $F(2,-3)$.

Solución

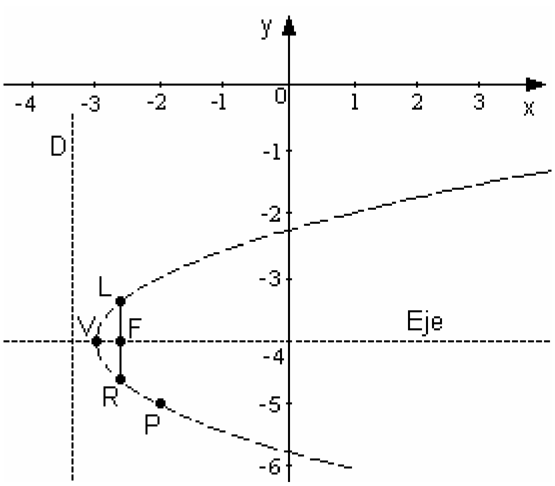


- De acuerdo con la representación gráfica de la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma: (4) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$.
- Con la magnitud de $VF = p = 2$ y las coordenadas del $V(2,-1)$, sustituyéndolas en (4) se tiene: $(x-2)^2 = -4(2)(y+1)$; $(x-2)^2 = -8(y+1)$ que es la ecuación de la parábola en forma

ordinaria y desarrollándola: $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ es su forma general.

2) Obtener la ecuación de la parábola horizontal cuyo vértice es $V(-3,-4)$ y pasa por el punto $P(-2,-5)$.

Solución



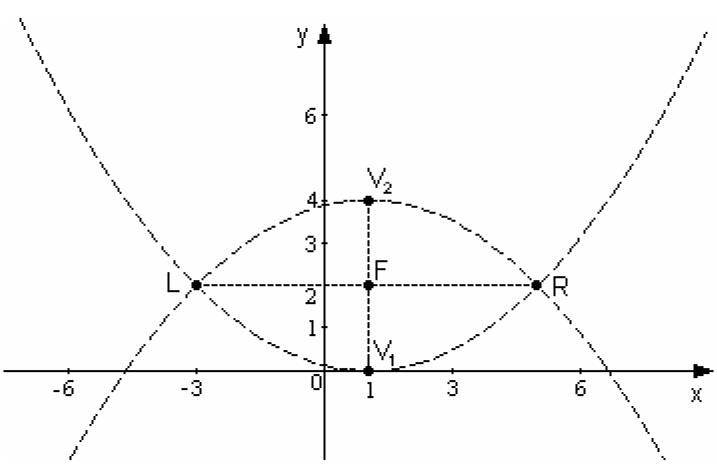
Representando gráficamente la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma

(1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

- Sustituyendo las coordenadas del vértice $V(-3,-4)$ en la ecuación (1): $(y+4)^2 = 4p(x+3)$•••(a).
- Si el punto $P(-2,-5)$ está sobre la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (a): $(-5+4)^2 = 4p(-2+3)$; $1 = 4p(1)$; $p = \frac{1}{4}$, sustituyendo este valor en la ecuación (a) $(y+4)^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(x+3)$; la ecuación en forma ordinaria: $(y+4)^2 = (x+3)$, desarrollándola, la ecuación en forma general: $y^2 - x + 8y + 13 = 0$.

3) Hallar la ecuación de la parábola cuyos extremos del lado recto (LR) son los puntos $L(-3,2)$, $R(5,2)$.

Solución



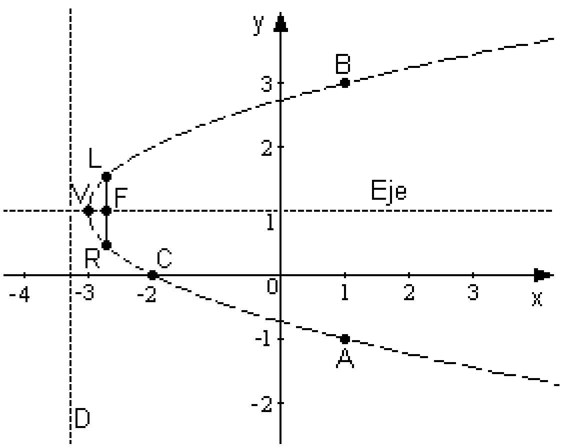
- Graficando la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma (3) y (4) o sea: $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$ (2 parábolas verticales pueden cumplir con la información dada).
- Como la magnitud de $LR = 4p = 8$; $p = 2$.
- El foco es el punto medio del segmento LR:

$$F\left(\frac{x_R + x_L}{2}, \frac{y_R + y_L}{2}\right) = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,2).$$

- Las coordenadas de los 2 vértices son: $V_1(1,0)$ y $V_2(1,4)$.
- Las ecuaciones en forma ordinaria son: con $V_1(1,0)$: $(x-1)^2 = 4(2)(y-0)$; $(x-1)^2 = 8y$

  con $V_2(1,4)$: $(x-1)^2 = -4(2)(y-4)$; $(x-1)^2 = -8(y-4)$.

4) Determinar la ecuación de la parábola horizontal que pasa por los 3 puntos no colineales $A(1,-1)$, $B(1,3)$ y $C(-2,0)$.



Solución

- Representando gráficamente la información, la ecuación de la parábola debe ser de la forma: (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ o bien $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ •••(5).
- Como los puntos A, B y C son de la parábola, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, por lo tanto, sustituyendo las coordenadas de cada punto en la ecuación (5) se tiene:

  con $A(1,-1)$: $(-1)^2 + D(1) + E(-1) + F = 0$

  $D - E + F = -1$ •••(a)

  con: $B(1,3)$: $(3)^2 + D(1) + E(3) + F = 0$

  $D + 3E + F = -9$ •••(b)

  con: $C(-2,0)$: $(0)^2 + D(-2) + E(0) + F = 0$

  $-2D \quad + F = 0$ •••(c)

- Las ecuaciones (a), (b) y (c) forman un sistema de 3 ecuaciones lineales, cuya solución nos dará los valores de D, E y F:

$$\begin{cases} D - E + F = -1 & \bullet\bullet\bullet(a) \\ D + 3E + F = -9 & \bullet\bullet\bullet(b) \\ -2D \quad + F = 0 & \bullet\bullet\bullet(c) \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 0 + 6 + 0 + 1 = 12$$

$$D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-3+0+0+0+0-9}{12} = \frac{-12}{12} = -1 \; ; \boxed{D = -1}$$

Sustituyendo el valor de $D = -1$ en la ecuación (c):

$$-2(-1)+F=0 \;;\; \boxed{F=-2}$$

Sustituyendo los valores de $D=-1$ y $F=-2$ en cualquiera de las ecuaciones (a) o (b); sea en (a): $(-1)-E-2=-1$; $\boxed{E=-2}$.

Sustituyendo los valores de $D=-1$, $E=-2$ y $F=-2$ en la ecuación (5), se tiene:

$\boxed{y^2-x-2y-2=0}$ es la ecuación de la parábola en forma general.
Y completando cuadrados se tiene: $(y-1)^2=(x+3)$ forma ordinaria, con elementos: $V(-3,1)$, $p=\frac{1}{4}$, $F\left(-\frac{11}{4},1\right)$, $L\left(-\frac{11}{4},\frac{3}{2}\right)$, $R\left(-\frac{11}{4},\frac{1}{2}\right)$, Ec. eje: $y=1$, Ec. "D": $x=-\frac{13}{4}$

5) El mismo problema del inciso **4)** lo resolveremos ahora aplicando el determinante:

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ y_A^2 & y_A & x_A & 1 \\ y_B^2 & y_B & x_B & 1 \\ y_C^2 & y_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ (-1)^2 & -1 & 1 & 1 \\ (3)^2 & 3 & 1 & 1 \\ (0)^2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por el método de menores y cofactores, como ya lo hemos hecho anteriormente:

$$\begin{array}{c|cccc|} & + & - & + & - \\ + & y^2 & y & x & 1 \\ - & 1 & -1 & 1 & 1 \\ + & 9 & 3 & 1 & 1 \\ - & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} = 0 \quad ; \quad y^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = y^2(-1-6+0+0-2-3) = -12y^2$$

$$-y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -y(1-18+0+0+2-9) = 24y \quad ; \quad x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(3+0+0+0+0+9) = 12x$$

$$-1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1(-6+0+0+0+0-18) = 24$$

Sumando estos resultados: $-12y^2+24y+12x+24=0$, dividiendo entre -12:

$$\frac{-12y^2+24y+12x+24}{-12}=\frac{0}{-12}$$

$$\boxed{y^2-2y-x-2=0} \text{ Forma general}$$

EJERCICIOS

1) Obtener la ecuación de la parábola horizontal cuyo vértice es el punto $V(-1,-3)$ y su foco $F(-2,-3)$.

2) Encuentre la ecuación de la parábola vertical cuyo vértice es $V(1,-1)$ y pasa por el punto $P(3,1)$.

3) Hallar la ecuación de la parábola horizontal cuyos extremos del lado recto (LR) son los puntos $L(-1,1)$, $R(-1,-5)$.

Determinar la ecuación de la parábola vertical que pasa por los 3 puntos no colineales $A(2,-1)$, $B(4,0)$ y $C(5,3)$:

4) Aplicando el método del ejemplo **4)**.

5) Aplicando el método del ejemplo **5)**.

9.5. ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA CON EJE FOCAL OBLICUO A LOS EJES COORDENADOS

Esta parte está relacionada con la sección 7.5 (capítulo VII) y se recomienda leerlo nuevamente, con objeto de lograr una mejor comprensión de lo que se expondrá.

Recordar que en la ecuación general de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, si el valor del discriminante es cero, o sea que $B^2-4AC=0$, la cónica que representa esta ecuación es una parábola oblicua respecto a los ejes coordenados x,y (o como caso degenerado, un par de rectas paralelas o coincidentes). La presencia del término Bxy en la ecuación, hace un poco más difícil la construcción de la gráfica de la parábola.

Citaremos 2 procedimientos para graficar una ecuación de una parábola oblicua (con término en xy).

<u>Primer Procedimiento</u>

- Dada la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, verificar que $B^2-4AC=0$, para estar seguros de que la cónica es una parábola.

- El término Bxy se anulará obteniendo el <u>ángulo agudo</u> "α" de rotación de los ejes:

Con la expresión $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C}$

Si $A \neq C$ y considerando que "α" es agudo, podemos conocer el valor de $\cos 2\alpha$, para que a partir de las identidades trigonométricas $sen\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ se puedan obtener las fórmulas de rotación de los ejes: $x = x'\cos\alpha - y' sen\alpha$; $y = x' sen\alpha + y'\cos\alpha$.

Si $A = C$, el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$ (ver sección 7.5), con este valor, $sen 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y las fórmulas de rotación de los ejes son: $x = x'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$; $y = x'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.

- Al sustituir las fórmulas de rotación de los ejes en la ecuación dada $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en x', y' que sumarán cero, se obtendrá una nueva ecuación en x', y' sin el término en $x'y'$ y cuyo eje de la parábola será paralelo al nuevo sistema coordenado x', y'.

- Con la ecuación obtenida en el paso anterior se procede completando cuadrados para determinar las fórmulas de traslación $x' = x'' + h$, $y' = y'' + k$, logrando con esto que el vértice de la parábola coincida con el origen del nuevo sistema coordenado x'', y''.

<u>Segundo Procedimiento</u>

Llamaremos a este procedimiento "suma de ordenadas".

- Verificar que el discriminante $B^2 - 4AC$ de la ecuación dada $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sea cero, para saber que se trata de una parábola.

- Despejar la variable "y" de la ecuación dada, la expresión que se obtiene será de la forma $y = y_1 \pm y_2$, en donde y_1 es un diámetro de la parábola (lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas); $\pm y_2$ se le llama "ordenada sobre el diámetro".

- Por último, se construye una tabla para calcular algunos puntos de la parábola, que al unirlos con línea continua se obtendrá un bosquejo de la gráfica de la curva.

EJEMPLOS

En cada inciso, se pide bosquejar la gráfica de la ecuación dada.

1) $x^2-4xy+4y^2+29x-8y+54=0$

Solución
Aplicaremos el segundo procedimiento:

- Calculamos el discriminante $B^2-4AC=(-4)^2-4(1)(4)=0$, se trata de una parábola.
- Despejamos la variable "y": se ordena de la siguiente manera $4y^2-(4x+8)y+x^2+29x+54=0$, en donde se tiene que: $a=4$, $b=-(4x+8)$ y $c=x^2+29x+54$ y aplicando la fórmula general $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$y=\frac{4x+8\pm\sqrt{(-4x-8)^2-4(4)(x^2+29x+54)}}{2(4)}=\frac{4x+8\pm\sqrt{16x^2+64x+64-16x^2-464x-864}}{8}$$

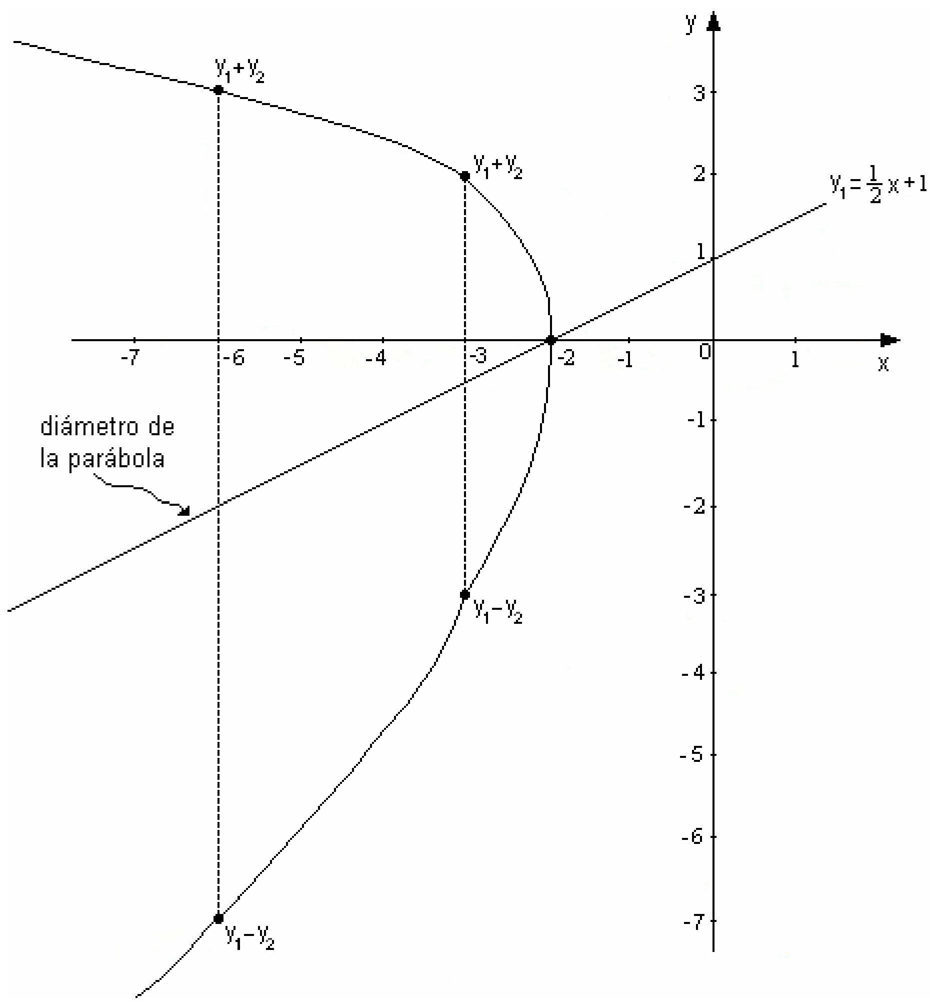
$$y=\frac{4x+8\pm\sqrt{-400x-800}}{8}=\frac{4x+8\pm 20\sqrt{-x-2}}{8}$$

(a)••• $\boxed{y=\frac{1}{2}x+1\pm\frac{5}{2}\sqrt{-x-2}}$, esta expresión consta de dos partes: $y=y_1\pm y_2$; $y_1=\frac{1}{2}x+1$ (diámetro de la parábola), $y_2=\pm\frac{5}{2}\sqrt{-x-2}$ (ordenada contada sobre el diámetro).

- Se construye la siguiente tabla:
  Si el dominio de la expresión (a) es de tal modo que $-x-2\geq 0$ donde $x\leq -2$, por lo tanto, Dominio $=(-\infty,-2]$, damos valores a "x" de acuerdo al dominio:

- Para bosquejar la gráfica de la parábola, primero graficamos su diámetro $y_1=\frac{1}{2}x+1$, luego los puntos calculados en la tabla y uniéndolos con línea continua:

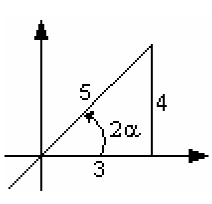
	x	-2	-3	-6	•••
	y_1	0	$-\frac{1}{2}$	-2	•••
	$\pm y_2$	0	$\pm\frac{5}{2}$	± 5	•••
*	y_1+y_2	0	2	3	•••
*	y_1-y_2	0	-3	-7	•••



2) Al mismo ejemplo del inciso anterior $x^2-4xy+4y^2+29x-8y+54=0$, apliquemos el primer procedimiento:

- Ya sabemos que $B^2-4AC=0$ y se trata de una parábola.

- Como $A=1$ y $C=4$, $A\neq C$ entonces $\tan 2\alpha=\dfrac{B}{A-C}=\dfrac{-4}{1-4}=\dfrac{4}{3}$



como "α" es agudo y $\tan 2\alpha=\dfrac{4}{3}$, entonces $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{5}$ y las identidades

$$sen\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\alpha=sen^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=26.6^0$, es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas de rotación son: $x=x'\cos\alpha-y'sen\alpha=x'\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)-y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $x=\dfrac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$ $\bullet\bullet\bullet$(a)

$$y = x'sen\alpha + y'\cos\alpha = x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ ;\ y = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \ \cdots(b)$$

- Sustituyendo las expresiones (a) y (b) en la ecuación dada, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en $x'y'$ que sumarán cero:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 29x - 8y + 54 = 0$$

$$\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 29\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 54 = 0$$

$$5y'^2 + \frac{50}{\sqrt{5}}x' - \frac{45}{\sqrt{5}}y' + 54 = 0 \ \text{; dividiendo entre 5}$$

$$y'^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}x' - \frac{9}{\sqrt{5}}y' + \frac{54}{5} = 0 \ \cdots(c)$$

La expresión (c) ya no contiene el término en $x'y'$, es la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al sistema de coordenadas x', y'.

- Completando cuadrados en la ecuación (c) se determinarán las fórmulas de traslación $x' = x'' + h$, $y' = y'' + k$:

$$y'^2 - \frac{9}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{10}{\sqrt{5}}x' - \frac{54}{5} + \left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\left(y' - \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{10}{\sqrt{5}}x' - \frac{135}{20}$$

$$\left(y' - \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2 = -2\sqrt{5}\left(x' + \frac{27}{8\sqrt{5}}\right) \ \cdots(d)$$

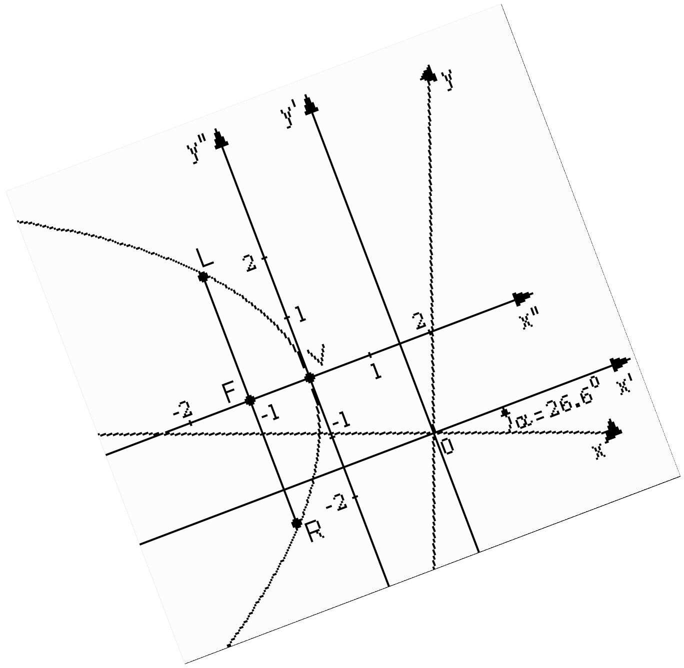
En la ecuación (d), el vértice de la parábola es $V(h,k) = \left(-\frac{27}{8\sqrt{5}}, \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)$ entonces, las fórmulas de traslación son: $x' = x'' - \frac{27}{8\sqrt{5}}$, $y' = y'' + \frac{9}{2\sqrt{5}}$; sustituyéndolas en la ecuación (d) resulta:

$$\left(y'' + \frac{9}{2\sqrt{5}} - \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2 = -2\sqrt{5}\left(x'' - \frac{27}{8\sqrt{5}} + \frac{27}{8\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{y''^2 = -2\sqrt{5}x''} \ \cdots(e)$$

La ecuación (e) es de la forma simplificada de la ecuación de la parábola dada originalmente, cuyo vértice coincide con el origen del nuevo sistema x'', y''.

$$-4p = -2\sqrt{5}$$
$$p = \frac{-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.1$$
$$2p \approx 2.2$$



3) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$

<u>Solución</u>

Aplicando el segundo procedimiento:

- $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$, se trata de una parábola.
- Despejando la variable "y" de la ecuación dada:

  se ordena la ecuación $4y^2 - 4xy + x^2 - x = 0$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -4x \\ c = x^2 - x \end{cases}$

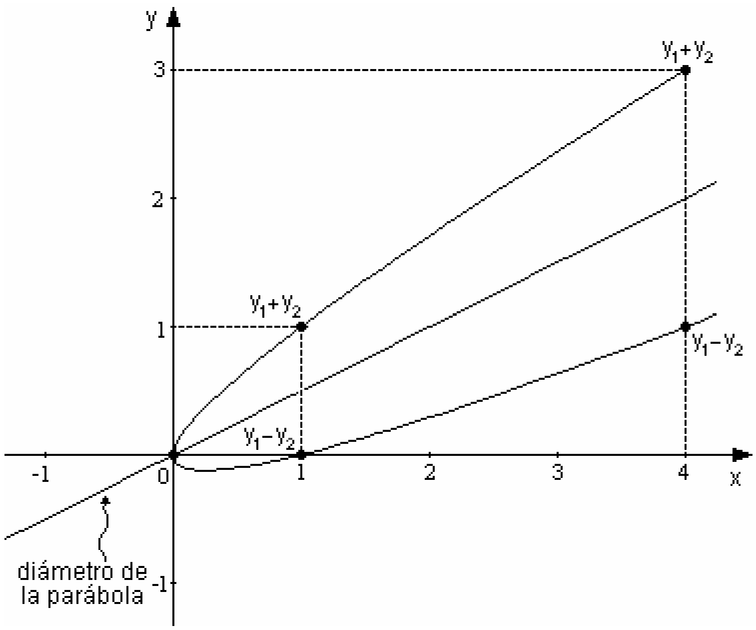
si $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{4x \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4(4)(x^2 - x)}}{2(4)} = \dfrac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 16x^2 + 16x}}{8}$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{x}}$$

$y_1 = \dfrac{1}{2}x$ (diámetro de la parábola)

$y_2 = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ (ordenada contada sobre el diámetro de la parábola)

- Se dibuja primero el diámetro de la parábola, se construye una tabla para obtener algunos puntos de la parábola y bosquejarla.



x	0	1	4	9	•••
y_1	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	•••
$\pm y_2$	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	•••
y_1+y_2	0	1	3	6	•••
y_1-y_2	0	0	1	3	•••

$Dominio = [0, \infty)$

4) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

<u>Solución</u>

Se aplicará el segundo procedimiento:

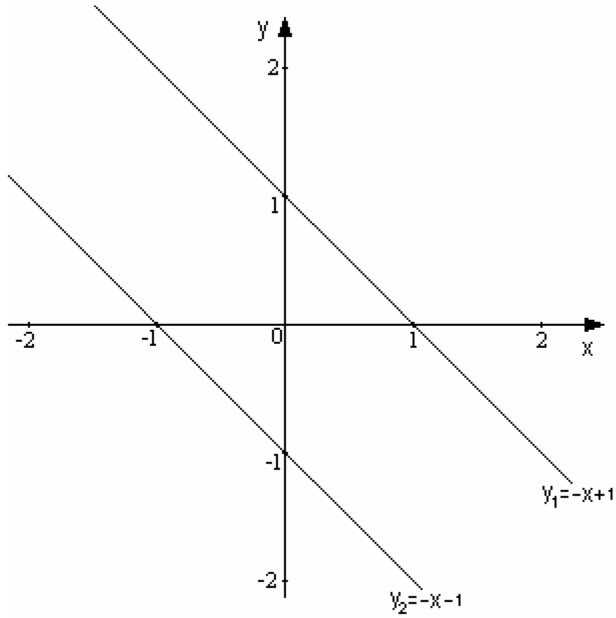
- $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$, se trata de una parábola.
- Despejando la variable "y" de la ecuación dada:

se ordena la ecuación $y^2 + 2xy + x^2 - 1 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2x \\ c = x^2 - 1 \end{array} \right.$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4(1)(x^2 - 1)}}{2(1)} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2 + 4}}{2}$$

$$\boxed{y = -x \pm 1}$$

En este caso, la parábola degenera en dos rectas paralelas: $y_1 = -x + 1$; $y_2 = -x - 1$



5) $x^2 + 2xy + y^2 - x + 5y + 4 = 0$

<u>Solución</u>

Aplicando el primer procedimiento:

- $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$, es una parábola.
- Como $A = C$, $1 = 1$, el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$, por lo tanto las fórmulas de rotación de los ejes son:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \;\; ; \;\; y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

- Sustituyendo las fórmulas anteriores en la ecuación dada, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en $x'y'$ que suman cero:

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 4 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)x'^2 + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

$2x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$; dividiendo entre 2

$x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0$; completando cuadrados

$$\left(x'^2+\frac{2}{\sqrt{2}}x'+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}y'-2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad ; \quad \left(x'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}y'-\frac{3}{2}$$

(a)••• $\left(x'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; como el vértice de esta ecuación

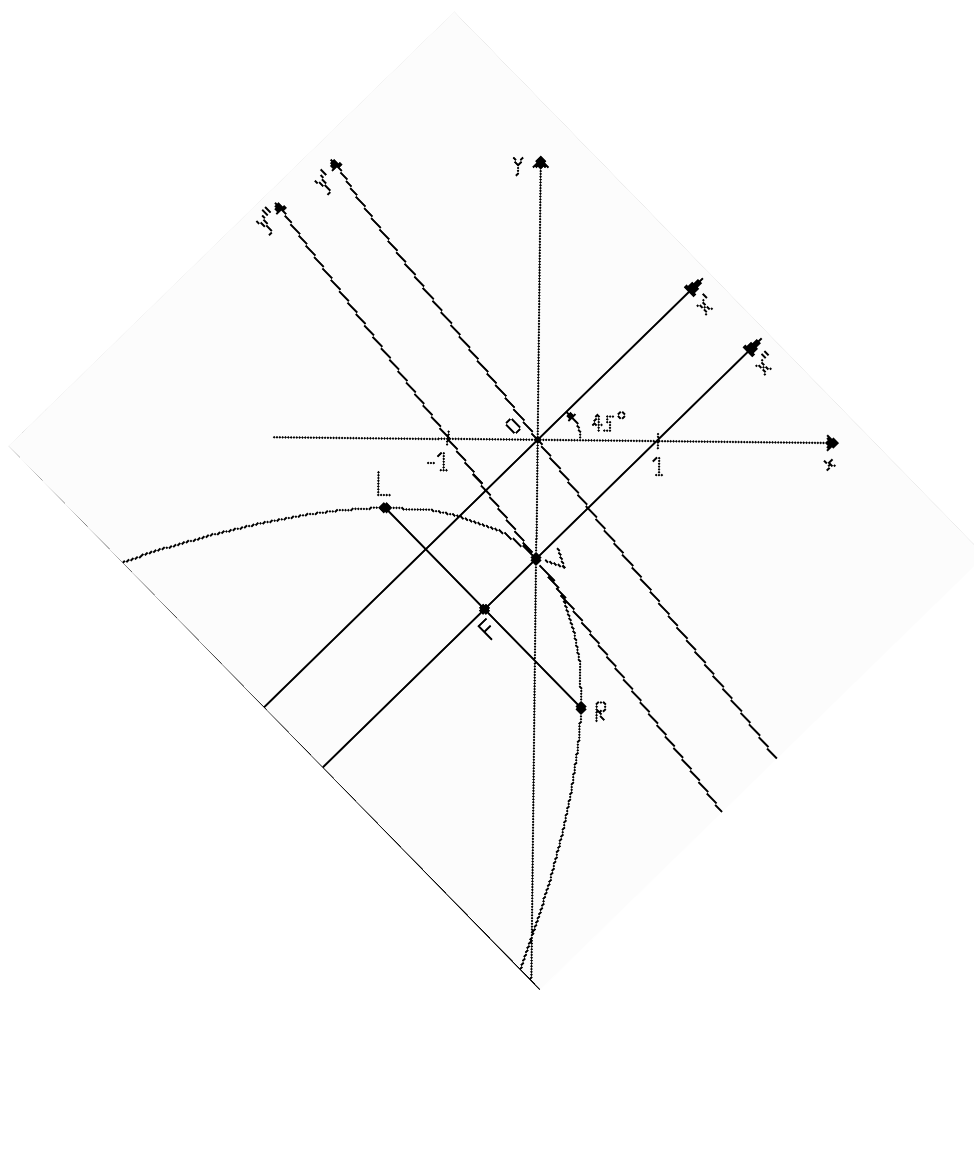
es: $V\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, las fórmulas de traslación de los ejes son:

$x'=x''-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y'=y''-\frac{1}{\sqrt{2}}$ que al sustituirlos en la ecuación (a)

se tiene $\left(x''-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y''-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\boxed{x''^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}y''} \text{•••(b)} \quad ; \quad p=\frac{3}{4\sqrt{2}}\approx 0.5$$

La ecuación (b) es la forma simplificada de la ecuación de la parábola dada, cuyo vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas x'', y''.



EJERCICIOS

En cada inciso, hay que bosquejar la gráfica de la ecuación dada aplicando el procedimiento que se indica.

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$, aplique el primer procedimiento.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + \frac{1}{4} = 0$, aplique el segundo procedimiento.

3) $9x^2 - 6xy + y^2 - x = 0$, aplique el primer procedimiento.

4) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16x - 24y + 3 = 0$, aplique el segundo procedimiento.

5) $9x^2 - 6xy + y^2 + x - 2y - 14 = 0$, aplique el segundo procedimiento.